3. popravni kolokvij iz Matematike
(Ljubljana, 8. 9. 2017)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`*.*

$\boxed{\textbf{Vse odgovore dobro utemelji!}}$

1. Zaporedje a_n je dano s formulo
$$a_n = \frac{n+1}{2n-1}.$$
(a) Izračunaj prvih nekaj členov zaporedja.
(b) Pokaži, da je zaporedje monotono. Naraščajoče ali padajoče?
(c) Izračunaj limito zaporedja.

Rešitev: (a) $2, 1, \frac{4}{5}, \frac{5}{7}, \frac{2}{3}, \ldots$
(b) V prvi točki dobimo idejo, da bi zaporedje lahko bilo strogo padajoče. Dokažimo to trditev: $a_n > a_{n+1} \Leftrightarrow \frac{n+1}{2n-1} > \frac{n+2}{2n+1} \Leftrightarrow (n+1)(2n+1) > (n+2)(2n-1) \Leftrightarrow \cancel{2n^2} + \cancel{3n} + 1 > \cancel{2n^2} + \cancel{3n} - 2$ ✓
(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n}{2-1/n} = \frac{1+0}{2-0} = \underline{\underline{0.5}}.$

2. Pod kolikšnim kotom se sekata grafa funkcije $f(x) = x^3 + x$ in $g(x) = x - 1$? Določi enačbi tangent na f in g v presečišču.

Rešitev: Grafa se sekata, ko je $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 + \cancel{x} = \cancel{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$, torej v točki $(-1, -2)$. Velja $f'(x) = 3x^2 + 1$ in $g'(x) = 1$. Za kot φ med tangento na funkcijo f v x_0 in x-osjo velja $\tan\varphi = f'(x_0)$. Zato je kot med f in g v presečišču enak $|\arctan f'(-1) - \arctan g'(-1)| = |\arctan(4) - \arctan(1)| \doteq 0.54 \doteq \underline{\underline{31^\circ}}$.

Tangenta na graf funkcije f v x_0 ima enačbo $f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$. V našem primeru imata tangenti na f in g v $(-1, -2)$ enačbi $4 = \frac{y-(-2)}{x-(-1)}$ in $1 = \frac{y-(-2)}{x-(-1)}$, oziroma $\underline{\underline{y = 4x+2}}$ in $\underline{\underline{y = x-1}}$.

3. Izračunaj ploščino območja med grafoma funkcij

$$h(x) = \frac{1}{x+1} \quad \text{in} \quad k(x) = -\frac{1}{3}x + 1.$$

Rešitev: Grafa se sekata, ko je $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = -\frac{x}{3}+1 \Leftrightarrow 0 = x(x-2)$. Torej je ploščina $|\int_0^2 (h(x)-k(x))dx| = |\int_0^2 (\frac{1}{x+1}+\frac{x}{3}-1)|dx = |\ln(x+1)+\frac{x^2}{6}-x)|_0^2 = |\ln(3)+\frac{4}{6}-2| = \underline{\underline{\frac{4}{3}-\ln 3}} \doteq 0.2347$.

4. Poišči enačbo ravnine skozi točke $A(1,2,1)$, $B(2,0,2)$, $C(2,-1,3)$. Določi presečišče te ravnine in premice $x+1 = y+2 = z+3$.

Rešitev: Ravnina ima normalo $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} +i & -j & +k \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (-1,-1,-1)$. Enačba ravnine je $(x,y,z) \cdot \vec{n} = A \cdot \vec{n}$, torej $-x-y-z = -4$ oziroma $\underline{\underline{x+y+z=4}}$.

Za iskanje preseka vstavimo enačbo premice $x = y+1 = z+2$ v enačbo ravnine in dobimo $x+(x-1)+(x-2) = 4$ oziroma $x = \frac{7}{3}$ in zato $(x,y,z) = \underline{\underline{(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3})}}$