

Matematika (VŠŠ Računalništvo in informatika)

2. izpit, 6. februar 2017

1	
2	
3	
4	
Σ	

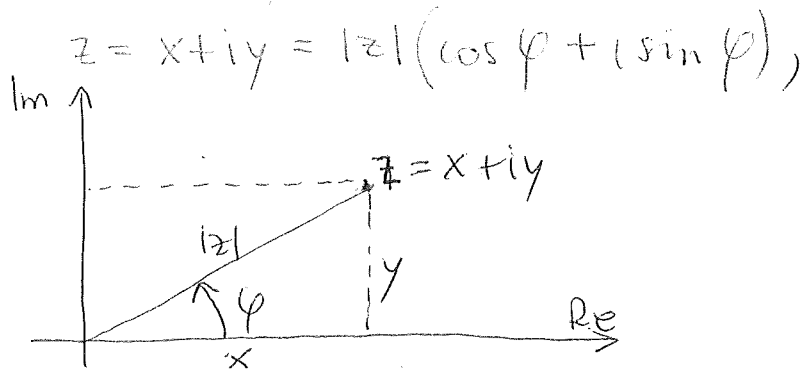
--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Ime in priimek

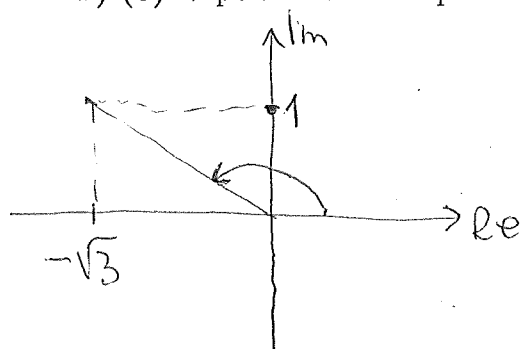
1. naloga (25 točk)

a) (9) Kaj je polarni zapis kompleksnega števila $z = x + iy$? Nariši sliko in napiši, kako se kartezični koordinati izražata s polarnima.



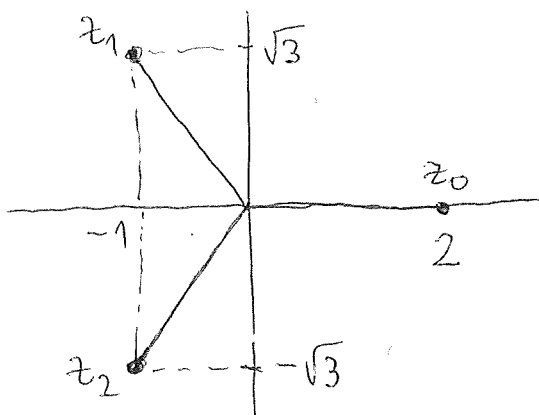
$x = |z| \cos \varphi$
 $y = |z| \sin \varphi$

b) (8) V polarni obliki zapiši število $z = -\sqrt{3} + i$. Izračunaj z^3 .



$\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$, $|z| = \sqrt{3+1} = 2$
 $z = -\sqrt{3} + i = 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$
 $z^3 = 8\left(\cos \frac{5\pi}{2} + i \sin \frac{5\pi}{2}\right) = 8i$

c) (8) Poišči in nariši vsa kompleksna števila z , za katera velja $z^3 = 8$.



$z_0 = 2$
 $z_1 = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$
 $z_2 = 2\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)$
 $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$
 $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$

2. naloga (25 točk)

a) (5) Kdaj je realno število a limita zaporedja $(a_n)_n$?

$a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$,
da je $|a - a_n| < \varepsilon$ za vse $n \geq n_0$.

b) (10) Zapiši člene a_1 , a_3 in a_4 zaporedja

$$a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n.$$

Ali zaporedje konvergira?

$$a_1 = -\frac{2}{3}, \quad a_3 = -\frac{8}{27}, \quad a_4 = \frac{16}{81}$$

ker za $q = -\frac{2}{3}$ velja $|q| < 1$, zaporedje
konvergira proti 0.

c) (10) Izračunaj limito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{3n^2+1}$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{h^2}\right)^{h^2} = e^3, \text{ ker}$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{3h^2+1}{h^2} = 3 \quad \text{in} \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{h^2}\right)^h = e$$

3. naloga (25 točk)

a) (5) Definiraj nedoločeni integral zvezne funkcije f .

$$F(x) = \int f(x) dx, \text{ \u010d\u00e9 je } F'(x) = f(x) \text{ za vse } x \in \mathcal{D}_f.$$

b) (5) Naj bosta F in G nedoločena integrala zvezne funkcije f . V kak\u0161ni zvezi sta funkciji F in G ?

Obstaja konstanta $C \in \mathbb{R}$, da je

$$F(x) = G(x) + C$$

c) (15) Izra\u010dunaj nedoločeni integral funkcije

$$f(x) = \frac{1}{x(x-1)}.$$

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$$

$$1 = A(x-1) + Bx$$

$$= (A+B)x - A$$

$$\Rightarrow A = -1, \quad B = 1$$

$$\int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx = \ln(x-1) - \ln x + C = \ln \frac{x-1}{x} + C$$

4. naloga (25 točk)

a) (10) Zapiši splošni sistem 2 linearnih enačb z 4 neznankami x_1, x_2, x_3 in x_4 . Definiraj matriko sistema in desno stran sistema. Zapiši sistem v matrični obliki.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2$$

vektor neznank: $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

matrika sistema:

desna stran:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

sistem v matrični obliki: $A\vec{x} = \vec{b}$

b) (15) Naj bo a realno število, ki ni enako 1. Reši sistem enačb

$$x + y + az = a$$

$$x + ay + z = a$$

$$ax + y + z = a$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & a \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & a(1-a) \end{array} \right] \sim$$

$$v_2 \leftarrow v_2 - v_1$$

$$v_3 \leftarrow v_3 - a \cdot v_1$$

$$v_2 \leftarrow v_2 / (a-1)$$

$$v_3 \leftarrow v_3 / (1-a)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+a & a \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 & a \end{array} \right]$$

$$v_3 \leftarrow v_3 - v_2$$

Če $a \neq -2$, je $z = \frac{a}{a+2}$, $y = z = \frac{a}{a+2}$ in

$$x = a - y - az = a - \frac{a}{a+2} - \frac{a^2}{a+2} = \frac{a^2 + 2a - a - a^2}{a+2} = \frac{a}{a+2}$$

Če $a = -2$, ni rešitve.